Técnicas de Resolução de Problemas - 2ª Parte

Curso Preparatório - PROFMAT 2014

Germán Ignacio Gomero Ferrer
gigferrer@uesc.br

15 de Agosto de 2013

Problema I.2.1 (Chinese National High School Mathematics Competition - 1983/1984)

No triângulo ABC temos $\sin A = 3/5$ e $\cos B = 5/13$. Qual é o valor de $\cos C$?

Proporcionalidade ou Equação de 1º Grau?

Problema 3 (Acesso 2011)

No dia do aniversário de João em 2010, uma pessoa perguntou a idade dele. João respondeu: "*se eu não contasse os sábados e os domingos da minha vida, eu teria 40 anos de idade*". João nasceu no ano de:

(a) 1946 (b) 1954 (c) 1962 (d) 1964 (e) 1968

Problema 3 (Acesso 2011) – Solução do Gabarito

Denote por x o ano do nascimento de João, e suponha que todos os anos transcorridos tem 365 dias. Assim, o número de dias que João viveu desde seu nascimento até (o dia anterior do) seu aniversário em 2010 é

$$D = 365(2010 - x) \; .$$

Por outro lado, pela resposta de João, se retiramos os sábados e os domingos, ele viveu o número de dias que há em 40 anos, logo

$$D = 365 \cdot 40 + \frac{365(2010 - x)}{7} + \frac{365(2010 - x)}{7} \; .$$

Equação de 1º Grau?

Problema 3 (Acesso 2011) – Solução do Gabarito (cont.)

Temos assim a equação de 1º grau

$$365(2010 - x) = 365\left[40 + \frac{2}{7}(2010 - x)\right] \ ,$$

cuja solução é

$$x = 1954 \ .$$

<u>Resposta</u>: (b)

Equação de 1º Grau?

Problema 3 (Acesso 2011) – Solução mais simples?

Denote por x o ano do nascimento de João, e lembre que todos os anos tem 52 semanas. Assim, o número de semanas que João viveu desde seu nascimento até (o dia anterior do) seu aniversário em 2010 é

$$S = 52(2010 - x)\ .$$

Por outro lado, pela resposta de João, esse número de semanas de 5 dias (havendo retirado os sábados e os domingos) equivale a 40 anos com semanas de 7 dias, logo

$$5 \cdot S = 7 \cdot 52 \cdot 40\ .$$

Equação de 1º Grau?

Problema 3 (Acesso 2011) – Solução mais simples? (cont.)

Temos assim a equação de 1º grau

$$5 \cdot 52 \cdot (2010 - x) = 7 \cdot 52 \cdot 40 \ ,$$

cuja solução é

$$x = 1954 \ .$$

Resposta: (b)

Proporcionalidade?

Problema 3 (Acesso 2011) – Solução mais simples!

Perceba que, se na sua resposta, João tivesse contado apenas um dia da semana, a sua idade *fictícia* seria $1/7$ da idade real; se ele tivesse contado dois dias da semana, sua idade *fictícia* seria $2/7$ da idade real; e assim por diante. Como João contou 5 dias da semana, sua idade *fictícia* é $5/7$ da idade real. Assim, chamando de x a idade real de João, temos

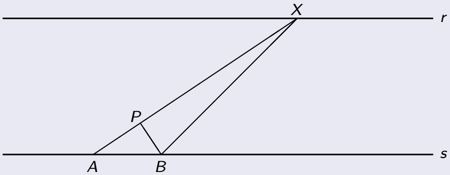
$$\frac{5}{7}x = 40\ ,$$

e portanto $x = 56$. Logo João nasceu em $2010 - 56 = 1954$.
Resposta: (b)

Áreas ou Semelhança de triângulos?

Problema 6 (Acesso 2011)

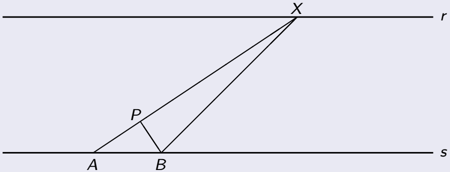
Na figura



as retas r e s são paralelas a uma distância de 2 uma da outra. AB é um segmento unitário contido em s, X é um ponto de r com $\overline{AX} = 5$ e P é o pé da perpendicular baixada de B sobre AX. O comprimento de BP é:

$(a)\ 2/3 \quad (b)\ 1/5 \quad (c)\ 2/5 \quad (d)\ 3/4 \quad (e)\ 2/3$

Problema 6 (Acesso 2011) – Solução do Gabarito



Chame $\overline{AP} = x$, $\overline{PX} = 5 - x$ e $\overline{BP} = y$. Observe que

$$\text{Área}_{ABX} = \text{Área}_{APB} + \text{Área}_{XPB} \ ,$$

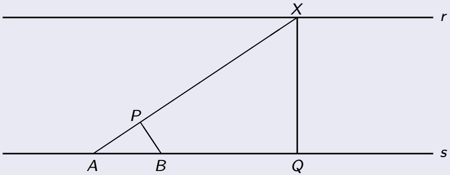
e portanto

$$\frac{1 \cdot 2}{2} = \frac{xy}{2} + \frac{(5-x)y}{2} \ ,$$

donde $y = 2/5$.
Resposta: (c)

Semelhança de triângulos?

Problema 6 (Acesso 2011) – Solução mais simples



Observe que os triângulos AQX e APB são semelhantes, e portanto

$$\frac{PB}{XQ} = \frac{AB}{AX} .$$

Substituindo valores obtemos $\overline{PB} = 2/5$.
Resposta: (c)

Equação de 2º Grau ou Divisibilidade?

Problema 8 (Acesso 2011)

Um grupo de jovens aluga por 342 reais uma van para um passeio, findo o qual três deles saíram sem pagar. Os outros tiveram que completar o total pagando, cada um deles, 19 reais a mais. O número de jovens era de:

$$(a)\ 8 \quad (b)\ 9 \quad (c)\ 10 \quad (d)\ 12 \quad (e)\ 19$$

Equação de 2º Grau ou Divisibilidade?

Problema 8 (Acesso 2011) – Planteamento do problema

Sejam x o número de jovens e y o que cada jovem deveria ter pago, temos o sistema de equações

$$\begin{aligned} xy &= 342 \\ (x-3)(y+19) &= 342 \,. \end{aligned}$$

Segue–se que

$$(x-3)(y+19) = xy \,,$$

e portanto

$$19x - 3y = 57 \,.$$

Equação de 2º Grau?

Problema 8 (Acesso 2011) – Solução do Gabarito

Como da primeira equação temos $y = 342/x$, obtemos então

$$19x - \frac{3 \cdot 342}{x} = 57 \,,$$

o que (após um pouco de álgebra) gera a equação

$$x^2 - 3x - 54 = 0 \,.$$

Resolvendo (após mais um pouco de álgebra) temos $x = 9$ ou $x = -6$.
Como x tem que ser positivo, $x = 9$ é a resposta que buscamos.
Resposta: (b)

Problema 8 (Acesso 2011) – Solução mais simples?

Observe que $57 = 19 \cdot 3$, logo esta equação pode ser escrita como

$$19 \cdot (x - 3) = 3 \cdot y \;;$$

e como 19 não é divisível por 3, então y tem que ser divisível por 19. Experimentemos:

- Se $y = 19$ então $x - 3 = 3$, e portanto $x = 6$. Mas $xy = 6 \cdot 19 = 114$, é diferente da equação $xy = 342$.
- Se $y = 2 \cdot 19$ então $x - 3 = 6$, e portanto $x = 9$. Neste caso $xy = 9 \cdot 38 = 342$. Logo $x = 9$ é a resposta que buscamos.

Resposta: (b)

Divisibilidade?

Problema 8 (Acesso 2011) – Solução ainda mais simples?

Sejam x o número de jovens e y o que cada jovem deveria ter pago, e como $342 = 2 \cdot 3^2 \cdot 19$, temos o sistema de equações

$$\begin{aligned} xy &= 2 \cdot 3^2 \cdot 19 \\ (x-3)(y+19) &= 2 \cdot 3^2 \cdot 19 \,. \end{aligned}$$

Observe

- Da primeira equação, x ou y tem que ser divisível por 19.
- Da segunda tiramos que y é divisível por 19.
- Se $y = 19$ então $x - 3 = 9$, e portanto $x = 12$; ou seja, x é múltiplo de 4. Mas, pela primeira equação, x (nem y) é múltiplo de 4.
- Se $y = 2 \cdot 19$ então $x - 3 = 6$, e portanto $x = 9$. Neste caso $xy = 3^2 \cdot (2 \cdot 19)$. Logo $x = 9$ é a resposta que buscamos.

Resposta: (b)

Equação de 2º Grau ou Divisibilidade?

Problema 4 (Acesso 2013)

Na primeira fase de um campeonato interescolar de basquete, onde cada time joga uma vez contra cada um dos outros times, foram realizados 253 jogos. Quantos times havia no campeonato?

(a) 15 (b) 17 (c) 23 (d) 51 (e) 126

Equação de 2º Grau?

Problema 4 (Acesso 2013) – Solução do Gabarito

Seja n o número de times. Cada time realiza $n-1$ jogos. Então seriam $n(n-1)$ ao todo, mas essa contagem conta cada jogo duas vezes. Assim, são $\frac{n(n-1}{2}$ jogos. Queremos n tal que $\frac{n(n-1)}{2} = 253$, isto é, $n(n-1) = 506$.
A solução é $n = 23$ (ou resolve–se a equação de segundo grau $n^2 - n - 506 = 0$ ou então chega–se a esse número por inspeção dos números inteiros cujos quadrados são próximos de 500).
Resposta: (c)

Divisibilidade?

Problema 4 (Acesso 2013) – Solução mais simples!

Seja n o número de times. Cada time realiza $n-1$ jogos. Então seriam $n(n-1)$ ao todo, mas essa contagem conta cada jogo duas vezes. Assim, são $\frac{n(n-1}{2}$ jogos. Queremos n tal que $\frac{n(n-1)}{2} = 253$, isto é, $n(n-1) = 506$.
Observe que $506 = 2 \cdot 11 \cdot 23$, logo $506 = 23 \cdot 22$; e portanto, a solução é $n = 23$.
Resposta: (c)